תרגילי בית 4. התמרות לפלס

ינואר 2003

---

1. הפונקציה $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h(t)=2t$ עבור $0\le t\le 1$ ו $h(t)=2$ עבור $t>1$.

(א) חשב את התמרת לפלס של h.

(ב) פתור, **בעזרת** **<u>התמרות</u>** **<u>לפלס</u>** את המשוואה הדיפרנציאלית

$$y''(t)+y(t)=h(t)$$

כאשר נתון בנוסף שהפונקציה $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מקיימת $y(0)=y'(0)=0$
(אפשר להניח גם שכל אחת מן הפונקציות $|y(t)|$ ו $|y'(t)|$ חסומה על $[0,\infty)$ ע"י הפונקציה Ke^{at} עבור קבועים מתאימים $K>0$ ו $a\in\mathbb{R}$. מדוע אין צורך לדרוש ש y'' מקיימת תנאי דומה?)

(ג) נניח שעבור $n=1,2$, הפונקציה $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ מקיימת $|f_n(t)|\le Ke^{at}$ עבור כל $t\ge 0$ עבור קבועים $K>0$ ו $a\in\mathbb{R}$. נניח שהתמרות לפלס של f_1 ושל f_2 נתונות ע"י $\mathcal{L}[f_1](s)=\dfrac{1}{s^{10}+9}$ ו $\mathcal{L}[f_2](s)=\dfrac{1}{s^{20}+6}$. מצא נוסחא מפורשת עבור התמרת לפלס $\mathcal{L}[g](s)$ של הפונקציה $g:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ אשר מוגדרת ע"י $g(t)=\displaystyle\int_0^{t/2}f_1(x)f_2(\frac{t}{2}-x)dx$ עבור כל $t\ge 0$.

---

2. נתונות שתי פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ו $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. נניח שקיים:
(i) $f(t)=0$ ו $g(t)=0$ עבור כל $t<0$
(ii) f ו g רציפות למקוטעין מקומית ב $\mathbb{R}$, כלומר הן רציפות למקוטעין בכל קטע חסום.
(iii) קיימים קבועים ממשיים K_1, K_2 ו a כך ש $|f(t)|\le K_1e^{at}$ ו $|g(t)|\le K_2e^{at}$ עבור כל $t\ge 0$.
תהי $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ הקונבולציה של f ו g, ז"א $h(t)=(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dx$ עבור כל $t\in\mathbb{R}$.

(א) הוכיח כי $h(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx$ והפונקציה h מקיימת $h(t)=0$ עבור כל $t<0$.
(ב) מצאו קבועים ממשיים K_3 ו b, אשר תלויים ב K_1, K_2, ו/או a, כך ש $|h(t)|\le K_3te^{bt}$ עבור כל $t\ge 0$.
(ג) הוכיחו שקיימים קבועים ממשיים K_4 ו c כך ש $|h(t)|\le K_4e^{ct}$ עבור כל $t\ge 0$.

---

3. הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מחזורית, עם מחזור 2, ומקיימת $g(x)=e^{|x-1|}$ לכל $x\in[0,2]$. הפונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מקיימת $f(x)=g(x)$ לכל $x\ge 0$. תהי $F(s)=\mathcal{L}[f](s)$, התמרת לפלס של f. מצאו את כל המספרים הממשיים s שעבורם $F(s)$ מוגדרת וסופי. חשבו את $F(s)$ עבור כל הערכים האלה של s.

---

4. הפונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f=\sum_{n=1}^{\infty}e^{n^2}\chi_{[n,n+e^{-2n^2}]}$. (במילים אחרות, לכל n ב $\mathbb{N}$, הפונקציה מקיימת $f(x)=e^{n^2}$ לכל x בקטע $I_n=[n,n+e^{-2n^2}]$, ו $f(x)=0$ בכל הנקודות x אשר לא נמצאות באף אחד מהקטעים I_n.)

האם קיימים קבועים ממשיים K ו a כך ש $|f(t)|\le Ke^{at}$ לכל $t\ge 0$?

מצאו את כל המספרים $s\in\mathbb{C}$ (אם יש כאלו) אשר עבורם הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left|e^{-st}f(t)\right|dt$ קיים וסופי. (אין צורך לחשב את הגבול.)

מצאו את כל המספרים $s\in\mathbb{C}$ (אם יש כאלו) אשר עבורם קיימת $\mathcal{L}[f](s)$. (אין צורך לחשב את $\mathcal{L}[f](s)$.)

---

5. יהי P פולינום מדרגה p ויהי Q פולינום מדרגה q. נסמן $P(x)=\sum_{j=0}^{p}a_jx^j$ ו $Q(x)=\sum_{j=0}^{q}b_jx^j$. נניח ש $a_p=b_q=1$. לכל פונקציה y בעלת נגזרת מסדר p נשתמש בסימון $P\left(\frac{d}{dt}\right)y$ עבור הפונקציה $\sum_{j=0}^{p}a_j\frac{d^j}{dt^j}y$.

נניח שהפונקציה $y:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ בעלת נגזרת מסדר p ומקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y(t)=Q(t) \quad \text{לכל } t\ge 0.$$

נניח בנוסף ש $y^{(n)}(0)=c_n$ עבור $n=0,1,...,p-1$.

(א) הסבירו מדוע הנגזרת $y^{(p)}$ בהכרח רציפה ב $[0,\infty)$.

(ב) נניח שעבור $n=0,1,2,....,p-1$ הפונקציה $y^{(n)}$ מקיימת $|y^{(n)}(t)|\le Ke^{\gamma t}$ לכל $t\ge 0$, כאשר K ו γ הם קבועים ממשיים. הוכיחו כי $\mathcal{L}[y](s)$, התמרת לפלס של y, קיימת לכל s בתת קבוצה מסויימת של $\mathbb{C}$, ושהיא פונקציה **רציונלית** של s, כלומר היא מנה של שני פולינומים ב s.

(ג) מצאו את המספר השלם הגדול ביותר n כך שהגבול $\lim_{s\to+\infty}s^n\mathcal{L}[y](s)$ קיים וסופי עבור כל בחירה של המקדמים והמספרים a_j, b_j ו c_j אשר מוגדרים כנ"ל. האם n תלוי ב p ו/או q ?

(ד) הראו שאם חלק מהמקדמים והמספרים הנ"ל a_j, b_j ו c_j שווים ל 0, אזי הגבול $\lim_{s\to+\infty}s^m\mathcal{L}[y](s)$ קיים וסופי עבור מספר שלם מתאים m אשר גדול ממש מהמספר n שמ-צאתם בסעיף (ג). כמה גדול יכול להיות m אם דורשים, כקודם, ש $a_p=b_q=1$. האם הערך המקסימלי של m תלוי ב p ו/או q ?

(כאשר $t=0$ אנו מפרשים את כל הנגזרות כנגזרות חד צדדיות, מימין.)